

Gewichtspolynome und Decodierfehler

Gewichtsverteilung (A_0, \dots, A_n) , wobei

$$A_i := |\{c \mid c \in C, \text{wt}(c) = i\}|$$

Das dazugehörige Polynom heißt das *Gewichtspolynom* von C :

$$A_C(x) = \sum_{i=0}^n A_i x^i$$

Behandle zwei Arten von Fehlern

- (1) Wahrscheinlichkeit von unentdeckten Übertragungsfehlern
- (2) Decodierfehlerwahrscheinlichkeit

Lemma

Voraussetzung

C sei ein linearer Code über den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ mit der Gewichtsverteilung (A_0, \dots, A_n) . Übertragen wird über einen q -nären symmetrischen Kanal mit der Symbolfehlerwahrscheinlichkeit p .

Behauptung

Wahrscheinlichkeit das ein Übertragungsfehler unentdeckt bleibt:

$$\sum_{i=1}^n A_i \left(\frac{p}{q-1}\right)^i (1-p)^{n-i}$$

Definition der Decodierfehlerwahrscheinlichkeit (in Worten)

Die Decodierfehlerwahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein empfangenes Wort nicht zum tatsächlich gesendeten Codewort decodiert wird, sondern entweder gar nicht, oder zu einem falschen Codewort.

Mathematische Definition der Decodierfehlerwahrscheinlichkeit BD-Decodierfehlerwahrscheinlichkeit

Voraussetzung

Sei C eine $[n, k, d]$ -Code über dem Körper \mathbb{K} mit $|\mathbb{K}| = q$ und der Gewichtsverteilung (A_0, \dots, A_n) . Zusätzlich sei $t \in \mathbb{N}_0$ mit $t \leq \frac{d-1}{2}$.

Behauptung

Die Decodierfehlerwahrscheinlichkeit $P(C, t, p)$ ist

$$\sum_{i=1}^n A_i \sum_{j=0}^t \sum_{s=0}^j \left[\binom{i}{s} \left(\frac{p}{q-1}\right)^{i-s} \left(1 - \frac{p}{q-1}\right)^s \binom{n-i}{j-s} p^{j-s} (1-p)^{n-i-j+s} \right].$$